第 3 講　無限等比数列の極限

PART1　無限等比数列の極限と収束条件

要点整理と公式

要点 ①　無限等比数列

数列 a，ar，ar^2，……，ar^{n-1}，……を，初項 a，公比 r の「無限等比数列」という。

初項 r，公比 r の無限等比数列 $\{r^n\}$ の極限について考える。

(Ⅰ)　$r>1$ のとき

$r=1+h\ (h>0)$ とおくと　　$r^n=(1+h)^n$　……①

二項定理を用いると

$$(1+h)^n={}_nC_0+{}_nC_1h+{}_nC_2h^2+\cdots\cdots+{}_nC_nh^n$$

$$=1+nh+\frac{n(n-1)}{2}h^2+\cdots\cdots+h^n\geqq 1+nh\ \ (h>0\text{より})$$

つまり $(1+h)^n\geqq 1+nh$ がすべての自然数 n で成り立つ。

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(1+nh)=\infty$ であるから $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(1+h)^n=\infty$　　したがって $\displaystyle\lim_{n\to\infty}r^n=\infty$

(Ⅱ)　$r=1$ のとき

すべての自然数 n について $r^n=1$ であるから $\displaystyle\lim_{n\to\infty}r^n=1$

(Ⅲ)　$0<r<1$ のとき

$\dfrac{1}{r}=s$ とおくと $s>1$　　よって(Ⅰ)より $\displaystyle\lim_{n\to\infty}s^n=\infty$

したがって $\displaystyle\lim_{n\to\infty}r^n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{s}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{s^n}=0$

(Ⅳ)　$r=0$ のとき

すべての自然数 n について $r^n=0$ であるから $\displaystyle\lim_{n\to\infty}r^n=0$

(Ⅴ)　$-1<r<0$ のとき

$|r|=s$ とおくと $0<s<1$　　よって(Ⅲ)より $\displaystyle\lim_{n\to\infty}s^n=0$

したがって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}|r^n|=\lim_{n\to\infty}|r|^n=\lim_{n\to\infty}s^n=0$

ここで，$-|r^n| \leqq r^n \leqq |r^n|$

$\lim_{n\to\infty}(-|r^n|)=0$，$\lim_{n\to\infty}|r^n|=0$ であるから $\lim_{n\to\infty} r^n=0$

(Ⅵ) $r=-1$ のとき

数列 $\{r^n\}$ は -1，1，-1，1，……となる。

よって，数列 $\{r^n\}$ は振動し，極限はない。

(Ⅶ) $r<-1$ のとき

$|r|=s$ とおくと $s>1$ 　　よって(I)より $\lim_{n\to\infty} s^n=\infty$

よって，$\lim_{n\to\infty}|r^n|=\infty$ であるが，数列 $\{r^n\}$ の項の符号は交互に変わる。

したがって，数列 $\{r^n\}$ は振動し，極限はない。

以上より，次のことが成り立つ。

数列 $\{r^n\}$ の極限

$r>1$ のとき	$\lim_{n\to\infty} r^n=$	正の無限大に発散
$r=1$ のとき	$\lim_{n\to\infty} r^n=$	収束
$\|r\|<1$ のとき	$\lim_{n\to\infty} r^n=$	収束
$r\leqq -1$ のとき	振動	極限はない

要点 ② 無限等比数列の収束条件

数列 $\{r^n\}$ の極限の性質から，次のことがわかる。

数列 $\{r^n\}$ の収束条件

数列 $\{r^n\}$ が収束するための必要十分条件は　　　　　　である。

(ex) 無限等比数列 1，$x-1$，$(x-1)^2$，$(x-1)^3$，……が収束するような x の値の範囲

この数列の公比は $x-1$ であるから，収束する条件は

$x-1$

よって，$0<x\leqq 2$

1 (1) 第 n 項が次の式で表される数列の極限を調べよ。

(i) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$ (ii) $\left(\dfrac{5}{4}\right)^n$ (iii) $(-2)^n$ (iv) $-2\left(-\dfrac{3}{5}\right)^n$

(2) 次の極限を求めよ。

(i) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(5^n-3^n)$ (ii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{4^{n+1}+5^n}{3^n-5^n}$

(3) 数列 $\{(3x)^n\}$ が収束するような x の値の範囲を求めよ。また，そのときの極限値を求めよ。

Point Pickup

数列 $\{r^n\}$ の極限

$r>1$ のとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty}r^n=$

$r=1$ のとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty}r^n=$

$|r|<1$ のとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty}r^n=$

$r\leqq-1$ のとき （極限はない）

r^n を含む不定形

・整式 → もっとも底が大きい項で「　　　」

・分数式 → 分母の底が最も大きい項で「分母・分子を　　　」

数列 $\{r^n\}$ の収束条件

数列 $\{r^n\}$ が収束する $\iff$ 　　r

第 3 講　PART1 確認問題

第 n 項が次の式で表される数列の極限を求めよ。

答えは下の①～⑤のうちから選べ。

1 $\left(\frac{4}{3}\right)^n$ 　ア

① 0 に収束　② 1 に収束
③ 正の無限大に発散　④ 負の無限大に発散
⑤ 振動する

2 $\left(\frac{1}{4}\right)^n$ 　イ

① 0 に収束　② 1 に収束
③ 正の無限大に発散　④ 負の無限大に発散
⑤ 振動する

3 $(-3)^n$ 　ウ

① 0 に収束　② 1 に収束
③ 正の無限大に発散　④ 負の無限大に発散
⑤ 振動する

4 $\left(-\frac{2}{5}\right)^n$ 　エ

① 0 に収束　② 1 に収束
③ 正の無限大に発散　④ 負の無限大に発散
⑤ 振動する

次の問いに答えよ。

5 次の極限を求めよ。答えは下の①～⑥のうちから選べ。

$\lim_{n\to\infty}(4^n-3^n)=$ オ

① 0　② $\frac{1}{2}$　③ 1
④ -1　⑤ ∞　⑥ $-\infty$

6 次の極限を求めよ。答えは下の①～⑥のうちから選べ。

$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n-1}{3^n+2^n}=$ カ

① 0　② $\frac{1}{2}$　③ 1
④ -1　⑤ ∞　⑥ $-\infty$

7 数列 $\{(x-2)^n\}$ が収束するような x の値の範囲を求めよ。

キ $< x \leqq$ ク

また，極限値は，

キ $< x <$ ク のとき，ケ

$x=$ ク のとき，コ

である。

[MEMO]

第 3 講　無限等比数列の極限

PART1 無限等比数列の極限と収束条件

1 (1) 第 n 項が次の式で表される数列の極限を調べよ。

(i) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$　(ii) $\left(\dfrac{5}{4}\right)^n$　(iii) $(-2)^n$　(iv) $-2\left(-\dfrac{3}{5}\right)^n$

(2) 次の極限を求めよ。

(i) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(5^n-3^n)$　(ii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{4^{n+1}+5^n}{3^n-5^n}$

(3) 数列 $\{(3x)^n\}$ が収束するような x の値の範囲を求めよ。また，そのときの極限値を求めよ。

[解答]

(1)(i) $\left|\dfrac{2}{3}\right|<1$ より $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n=0$　よって 0 に収束する

(ii) $\dfrac{5}{4}>1$ より $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5}{4}\right)^n=\infty$　よって正の無限大に発散する

(iii) $-2<-1$ より，この数列は振動し，極限はない。

(iv) $\left|\dfrac{-3}{5}\right|<1$ より $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left\{-2\left(-\frac{3}{5}\right)^n\right\}=-2\cdot0=0$　よって 0 に収束する

(2)(i) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(5^n-3^n)=\lim_{n\to\infty}5^n\left\{1-\left(\frac{3}{5}\right)^n\right\}=\infty$

(ii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{4^{n+1}+5^n}{3^n-5^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{4\left(\frac{4}{5}\right)^n+1}{\left(\frac{3}{5}\right)^n-1}=\frac{0+1}{0-1}=-1$

(3) 数列 $\{(3x)^n\}$ は，公比 $3x$ の等比数列より，この数列が収束するための条件は

$-1<3x\leqq1$　よって $-\dfrac{1}{3}<x\leqq\dfrac{1}{3}$

極限値は

$-1<3x<1$　すなわち $-\dfrac{1}{3}<x<\dfrac{1}{3}$ のとき 0

$3x=1$　すなわち $x=\dfrac{1}{3}$ のとき 1

第 3 講　PART1 確認問題 解答

1

[正解] ア：③

[解説]

$\frac{4}{3}>1$ だから，

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4}{3}\right)^n=\infty$$ [A]

よって，**正の無限大に発散する。**

[A]　$r>1$ のとき，
$\lim_{n\to\infty} r^n=\infty$

2

[正解] イ：①

[解説]

$\left|\frac{1}{4}\right|<1$ だから，

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n=0$$ [B]

よって，**0 に収束する。**

[B]　$|r|<1$ のとき，
$\lim_{n\to\infty} r^n=0$

3

[正解] ウ：⑤

[解説]

$-3<-1$ だから，[C]

振動する。

[C]　$r\leqq-1$ のとき，$\{r^n\}$ は振動し，極限はない。

4

[正解] エ：①

[解説]

$\left|-\frac{2}{5}\right|<1$ だから，

$$\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{2}{5}\right)^n=0$$ [D]

よって，**0 に収束する。**

[D]　$|r|<1$ のとき，
$\lim_{n\to\infty} r^n=0$

5 [正解] オ：⑤

[解説]

$$\lim_{n\to\infty}(4^n-3^n)=\lim_{n\to\infty}4^n\left\{1-\left(\frac{3}{4}\right)^n\right\}$$ [E]

[E]　4^n でくくる。

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}4^n=\infty$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left\{1-\left(\frac{3}{4}\right)^n\right\}=1$ であるから，

$$\lim_{n\to\infty}(4^n-3^n)=\boldsymbol{\infty}$$

6 [正解] カ：③

[解説]

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n-1}{3^n+2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\dfrac{1}{3^n}}{1+\dfrac{2^n}{3^n}}$$ [F]

[F]　分母・分子を 3^n で割る。

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^n}{1+\left(\dfrac{2}{3}\right)^n}$$

$$=\frac{1-0}{1+0}=\mathbf{1}$$

7 [正解] キ：1，ク：3，ケ：0，コ：1

[解説]

数列 $\{(x-2)^n\}$ は，公比 $x-2$ の等比数列であるから，この数列が収束するための条件は，

$$-1<x-2\leqq 1$$ [G]

[G]　数列 $\{r^n\}$ が収束する $\Longleftrightarrow$ $-1<r\leqq 1$

よって，$\boldsymbol{1<x\leqq 3}$

極限値は，

$-1<x-2<1$，すなわち $1<x<3$ のとき，

$\mathbf{0}$ [H]

[H]　$|r|<1$ のとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}r^n=0$

$x-2=1$，すなわち $x=3$ のとき，[I]

$\mathbf{1}$

[I]　数列は
1，1，1，…
となる。